Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika

Pismeni ispit iz Euklidske geometrije II, 01.10.2013. (ispit pisati isključivo hemijskom olovkom plave ili crne tinte)

1. (40%)(a) Neka je t tangenta na opisani krug k trougla $\triangle ABC$ (u kome je $\measuredangle ACB < \frac{\pi}{2}$) u tački A i t' poluprava sa tjemenom A koja joj pripada i sa suprotne je strane prave AB u odnosu na tačku C. Pokazati da je ugao koji zahvataju poluprava t' i AB podudaran uglu trougla $\triangle ABC$ kod tjemena C.

(60%)(b) Pokazati da ako proizvoljni krug koji sadrži tačke B i C siječe ivice AB i AC trougla $\triangle ABC$ u tačkama B' i C', onda je duž $B'C'$ paralelna tangenti na opisani krug trougla $\triangle ABC$ u tački A.

2. (40%)(a) Dat je krug $k(I, r)$ i date su dvije tačke u unutrašnjoj oblasti kruga. U dati krug upisati pravougaonik čije stranice prolaze kroz dvije date tačke. Analizirati oba slučaja: kada date tačke pripadaju naspremnim stranicama i kada date tačke pripadaju susjednim stranicama.

(60%)(b) Date su paralelne prave a i b, tačka M između njih i prava c koja nije paralelna ni sa a, ni sa b. Konstruisati jednakokraki trougao $\triangle MAB$, sa osnovicom AB, tako da $A \in a$, $B \in b$ i $p(A, B) \| c$.

Napomena: Konstruisati figuru podrazumjeva četri koraka: Analizu, Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju.

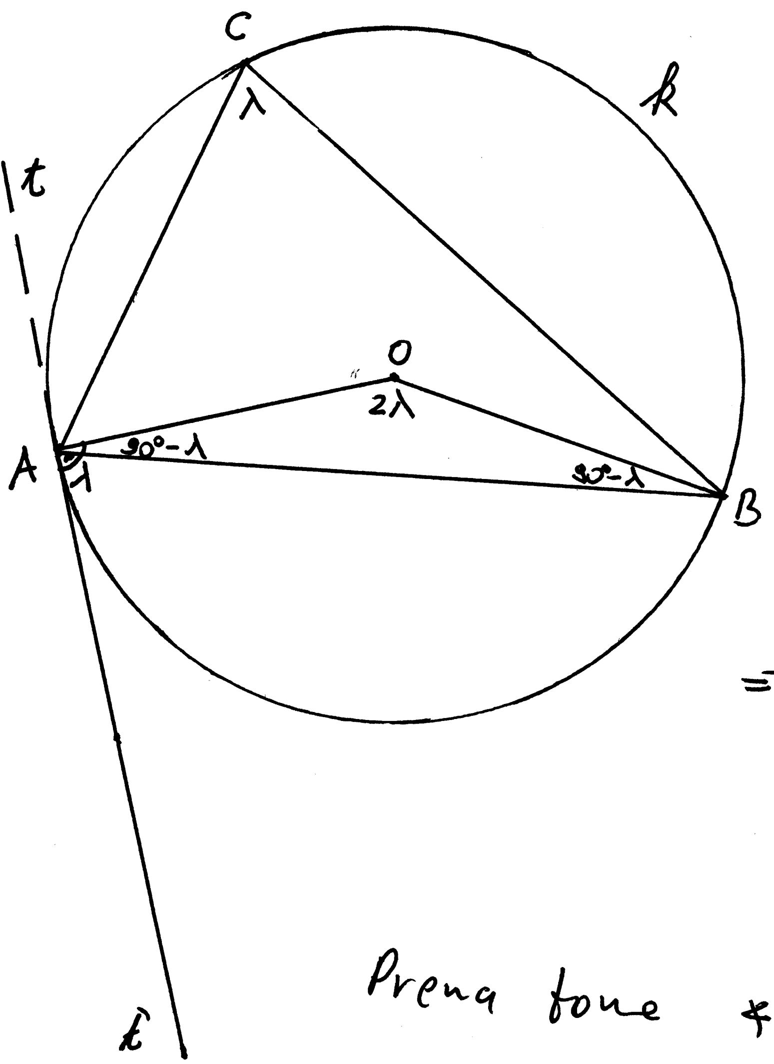
3. (50%)(a) Neka je $\triangle ABC$ dati trougao i neka su D i E proizvoljne tačke, redom, na stranicama AB i AC. Produžimo, redom, AB i AC do tačaka G i H tako da je $A - B - G$, $BG \cong AD$, $A - C - H$ i $CH \cong AE$. Ako je L presječna tačka duži BH i CG, pokazati da je $P_{\triangle LGH} = P_{\triangle ADE} + P_{\triangle LBC}$.

(50%)(b) Konstruisati krug koji dodiruje dvije date prave i dati krug. Detaljno sprovesti samo Analizu (ne koristiti dokaz tipa pozivanja na neki drugi Apolonijev problem, koji je od ranije poznat, nego sve detaljno analizirati). Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi ali bodovati će se samo Analiza.

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Neka je t tangenta na opisani krug k trougla ΔABC (u kome je $\measuredangle ACB < \frac{\pi}{2}$) u tački A i t' poluprava sa tjemenom A koja joj pripada i sa suprotne je strane prave AB u odnosu na tačku C. Pokazati da je ugao koji zahvataju poluprave t' i AB podudaran uglu trougla ΔABC kod tjemena C.

Rj. Ovaj zadatak je samo drugačiji oblik tvrdnje: "Ugao između tangente i tetive jednak je periferiskom uglu nad tom tetivom", tvrdnju koju smo na časovima vježbi već nekoliko puta dokazali.



Označimo sa λ ugao $\measuredangle ACB$. Odgovarajući centralni ugao je $\measuredangle AOB = 2\lambda$. Primjetimo da je ΔAOB jkk

$\Rightarrow \measuredangle OAB \cong \measuredangle OBA = 90° - \lambda$

Kako je t tangenta na krug k to je $OA \perp t$

$\Rightarrow \measuredangle OAt' = 90°$

$\Downarrow$

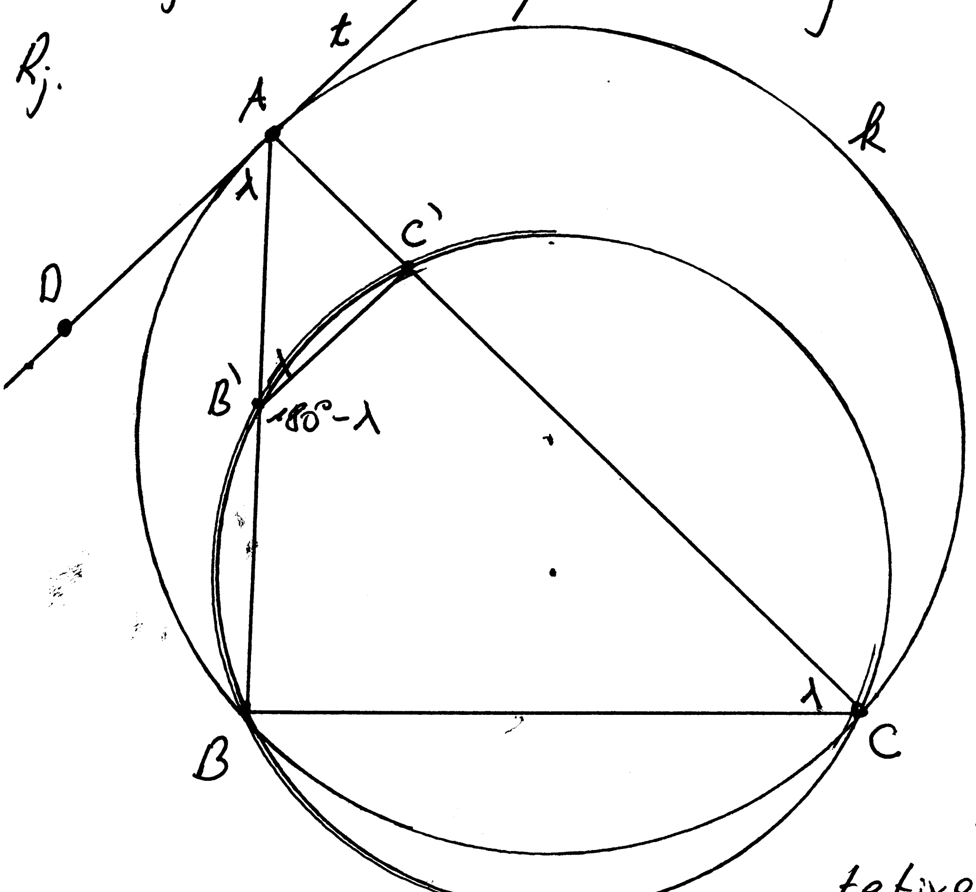
$\measuredangle BAt' = \lambda$

Prema tome $\measuredangle ACB \cong \measuredangle BAt'$

q.e.d.

#️⃣ Pokazati da ako proizvoljni krug koji sadrži tačke B i C siječe ivice AB i AC trougla $\triangle ABC$ u tačkama B' i C', onda je duž $B'C'$ paralelna tangenti na opisani krug trougla $\triangle ABC$ u tački A.

Rj.



Neka je t tangenta u tački A na krug k koji je opisan oko $\triangle ABC$, i neka je $D \in t$ koja se nalazi sa suprotne strane $p(B, A)$ od tačke C.

Znano da je ugao između tangente i tetive podudaran periferiskom uglu nad tom tetivom pa je $\measuredangle BAD \cong \measuredangle BCA = \lambda$.

Kako je $\square BCC'B'$ tetivni to je $\measuredangle C'B'B = 180° - \lambda$

pa je $\measuredangle C'B'A = \lambda$.

Kako su uglovi $\measuredangle B'AD$ i $\measuredangle C'B'A$ podudarni uglovi na pravoj $p(B', A)$ to je

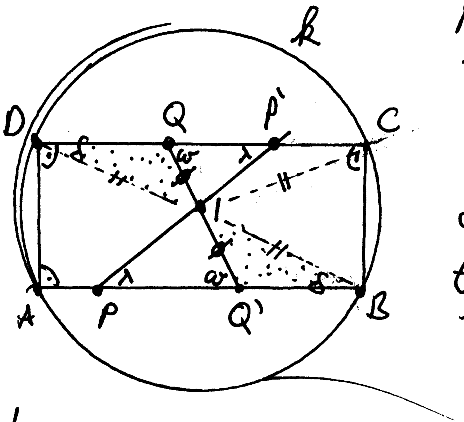
$$t \parallel B'C'$$

q.e.d.

(#) Dat je krug k i date su dvije tačke u unutrašnjoj oblasti kruga. U dati krug upisati pravougaonik čije dvije stranice prolaze kroz dvije date tačke. Analizirati oba slučaja: kada date tačke pripadaju naspremnim stranicama i kada date tačke pripadaju susjednim stranicama.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\square ABCD$ traženi pravougaonik, gdje su tačke P i Q date tačke koje pripadaju stranicama pravougaonika. Kako je ugao nad prečnikom prav to su dijagonale pravougaonika ujedno i prečnici od k tj. $AC \cap BD = \{I\}$

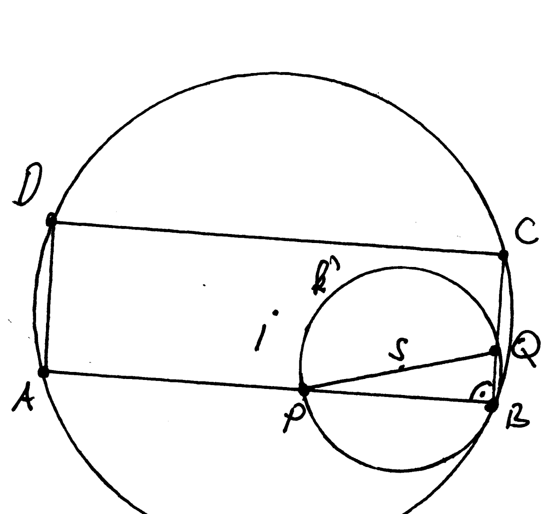


I slučaj:

Tačke P i Q pripadaju suprotnim stranicama, recimo $P \in AB$, $Q \in CD$. Neka je $p(P,I) \cap CD = \{P'\}$ i $p(Q,I) \cap AB = \{Q'\}$. Postavljamo pitanje: Da li je $\Delta PQ'I \cong \Delta IP'Q$? Da, ova dva trougla su podudarna
ZA VJEŽBU OVO RASPISATI
(na osnovu UUS $\Rightarrow \Delta Q'BI \cong \Delta QDI \Rightarrow$ na osn. UUS $\Rightarrow \Delta PQ'I \cong \Delta P'QI$)
Sad kako možemo konstruisati tačke P' i Q' time možemo konstruisati i prave $p(P,Q')$, $p(Q,P')$ a time i traženi pravougaonik.

II slučaj

Tačke P i Q pripadaju susjednim stranicama, recimo $P \in AB$, $Q \in BC$. Kako je $\measuredangle ABC = 90^\circ$ to je i $\measuredangle PBQ = 90^\circ \Rightarrow \Delta PBQ$ je pravougli. $\Rightarrow$ centar S kruga opisanog oko ΔPBQ se nalazi na sredini PQ.



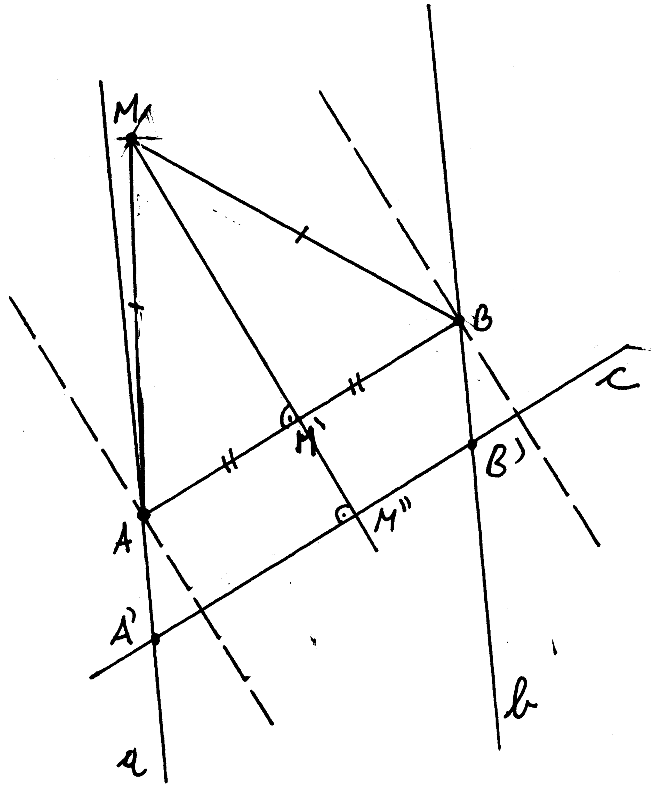
Kako su P i Q dvije date tačke, to nije teško konstruisati tačku B a poslije nje i pravougaonik $ABCD$.

(#) Date su paralelne prave a i b, tačka M između njih i prava c koja nije paralelna ni sa a, ni sa b. Konstruisati jednakokraki trougao ΔMAB, sa osnovicom AB, tako da $A \in a$, $B \in b$ i $p(A,B) \parallel c$.

Rj:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABM traženi jednakokraki trougao takav da $A \in a$, $B \in b$, $a \parallel b$, $p(A,B) \parallel c$, $c \nparallel a$, $c \nparallel b$, M tačka između pravih a i b.



Ako iz vrha M spustimo visinu MM' na osnovicu AB nije teško pokazati da je $AM' \cong BM'$ tj. da je M' središte AB (ovo možemo zaključiti iz $\Delta AM'M \cong \Delta BM'M$ gdje podudarnost trouglova slijedi iz SSU).

Dalje uvedimo oznake $c \cap a = \{A'\}$; $c \cap b = \{B'\}$, $p(M,M') \cap c = \{M''\}$.

Primijetimo da je $\square A'B'BA$ paralelogram (ZAŠTO?), pa je

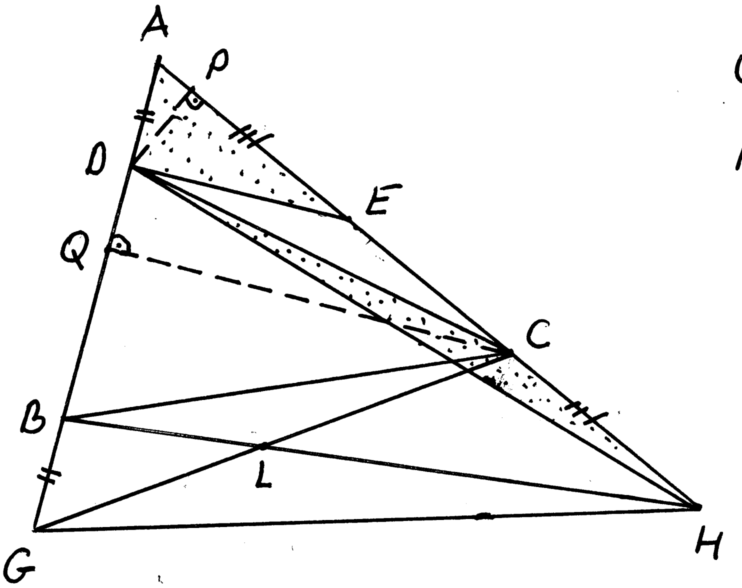
$$AB \cong A'B'$$

$\Rightarrow$ poznata nam je dužina od $\frac{1}{2}AB$.

Kako nam je data tačka M i prava c to tačku M'' možemo konstruisati ($\measuredangle MM''c = 90°$). Kako se tačke A i B nalaze na udaljenosti $\frac{1}{2}AB$ od prave $p(M,M'')$, a poznate su nam prave a i b, to tačke A i B nije teško konstruisati, a poslije njih i ΔABM.

(#) Neka je ΔABC dati trougao i neka su D i E proizvoljne tačke, redom, na stranicama AB i AC. Produžimo, redom, AB i AC do tačaka G i H tako da $A-B-G$, $BG \cong AD$, $A-C-H$ i $CH \cong AE$. Ako je L presječna tačka duži BH i CG, pokazati da je
$$P_{\Delta LGH} = P_{\Delta ADE} + P_{\Delta LBC}.$$

Rj.:



Uvedimo oznake kao na slici. Prvo primjetimo da je
$P_{\Delta ADE} = P_{\Delta CDH}$ ...(1) (zato što imaju jednake stranice $AE \cong CH$ i istu visinu koja odgovara toj stranici)

Zbog sličnog razloga (podudarne stranice i odgovarajuće visine) imamo $P_{\Delta ADH} = P_{\Delta HBG}$ ...(2) i $P_{\Delta ADC} = P_{\Delta CBG}$. ...(3)

Sad primjetimo

$$P_{\Delta ADH} = P_{\Delta ADC} + P_{\Delta CDH} \overset{(1)}{=} P_{\Delta ADC} + P_{\Delta ADE},$$

$$P_{\Delta HBG} \overset{(2)}{=} P_{\Delta ADH} = P_{\Delta ADC} + P_{\Delta CDH} \overset{(3)(1)}{=} P_{\Delta CBG} + P_{\Delta ADE}$$

tj. imamo $P_{\Delta HBG} = P_{\Delta CBG} + P_{\Delta ADE}$

Ako oduzmemo $P_{\Delta BGL}$ sa obe strane imamo

$$P_{\Delta LGH} = P_{\Delta CBL} + P_{\Delta ADE} \quad \text{q.e.d.}$$